第27卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 5
2010年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0789-06

应力为滤过复合Erlang更新过程时结构的可靠度*

柯俊斌

(福建师范大学数学与计算机科学学院，福州 350007)

摘　要: 滤过复合Erlang更新过程常用于描述我国公路交通中的车辆荷载随机过程。本文旨在讨论强度为随机变量、应力为滤过复合Erlang更新过程的半随机过程结构可靠性模型。利用Erlang更新过程的母函数，我们得到该随机模型的结构可靠度在四种不同情况下具体表达式。

关键词: 随机荷载；滤过复合Erlang更新过程；母函数；结构可靠度

分类号: **AMS**(2000) 62G05 **中图分类号**: O213.2 **文献标识码**: A

1 引言

在公路桥梁结构的可靠度计算中，涉及到两个最基本的方面，即结构强度和荷载效应的不定性分析。由于结构强度随时间影响变化较小，通常用随机变量来描述。而作用在路桥结构上的随机荷载，最重要的就是车辆荷载。它不但具有随机性，而且还随时间而变化。从统计数学的观点来看，可变荷载必须用随机过程来描述。文献[1]根据我国四条国道交通荷载观测数据，指出车重荷载可用滤过Poisson过程描述。文献[2]根据国道110上的现状车辆荷载统计分析，采用滤过复合Erlang更新过程描述车辆荷载随机过程，并且使用两个正态分布加权和的双峰型概率分布描述车辆荷载。文献[3,4]讨论了两类半随机过程模型(指数-复合Weibull过程模型、正态-平稳二项过程模型)的结构可靠度，其主要方法是采用最小变换方法，把半随机过程结构可靠性模型转化为随机变量结构可靠性模型，再利用当量正态法获得模型的结构可靠度。本文首先建立强度为随机变量，应力为滤过复合Erlang更新过程的半随机过程结构可靠性模型，再利用Erlang更新过程的母函数，给出结构在任一时刻t的可靠度$R(t)$。

2 预备知识

定义1[5] 称车辆荷载随机过程$\{X(t),\ t\geq 0\}$为滤过复合Erlang更新过程，如果它可以表示为

$$X(t)=\sum_{n=0}^{N(t)}\xi_n I_{(B_n,E_n]}(t),$$

其中：1) 车辆数随机过程$\{N(t),\ t\geq 0\}$为Erlang更新过程，即时间间隔独立且同服从参数为(k,λ)的Erlang分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(k)}\lambda^k x^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

收稿日期: 2008-12-08. **作者简介**: 柯俊斌(1974年5月生)，男，讲师. 研究方向：可靠性数学与医学统计.

*__基金项目__: 福建省自然科学基金(2006J0193).

2) $\xi_n\,(n=1,2,\cdots)$ 为第 n 个出现的车辆荷载，它们是独立同分布的随机变量序列，且与 $N(t)$ 独立，并令 $\xi_0=0$。

3)

$$I_{(B_n,E_n]}(t)=\begin{cases}1, & t\in(B_n,E_n],\\ 0, & t\notin(B_n,E_n],\end{cases}$$

记 $\tau_n\,(n=1,2,\cdots)$ 为 ξ_n 在桥梁某截面上所持续的时间，T_n 为 ξ_{n-1} 出现到 ξ_n 出现所需的时间间，且 $\tau_n\ll T_n$，并令 $\tau_0=0$，则

$$B_n=\sum_{i=1}^{n}T_i,\quad E_n=B_n+\tau_n$$

分别表示 ξ_n 在桥梁某截面上开始出现的时刻和结束时刻。

定义 2 设应力为随机过程 $\{X(t),\,t\geq 0\}$，强度为随机变量 Y，则结构在任一时刻 t 的可靠度为 $R(t)=P(Y>X(t))$。

引理 1[6] 设计数过程 $\{N(t),\,t\geq 0\}$ 为 Poisson 过程，则

$$P\big(N(t)=k\big)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad k=0,1,\cdots.$$

引理 2[7] 设 $T_i\,(i=1,2,\cdots)$ 是独立同分布于参数为 (k,λ) 的 Erlang 分布，$\{N(t),\,t\geq 0\}$ 是以 $\{T_i\}$ 为更新间距的更新过程，则更新过程的母函数为

$$P(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}s^nP\big(N(t)=n\big)=1+\frac{s-1}{sk}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{s^{\frac{1}{k}}\varepsilon^j}{1-s^{\frac{1}{k}}\varepsilon^j}\big\{1-\exp\big[-\lambda t\big(1-s^{\frac{1}{k}}\varepsilon^j\big)\big]\big\},$$

式中 $\varepsilon=\exp(2\pi\mathrm{i}/k)$。

3 滤过复合 Erlang 更新过程模型的结构可靠度

定理 1 设应力 $\{X(t),\,t\geq 0\}$ 为滤过复合 Erlang 更新过程，截口随机变量 $\xi_n\,(n=1,2,\cdots)$ 具有连续分布函数 $F(x)$，强度为随机变量 Y，具有连续密度函数 $g(x)$，且 $\xi_n\,(n=1,2,\cdots)$ 与 Y, $N(t)$ 相互独立，则结构在任一时刻 t 的可靠度为

$$R(t)=\int_0^{\infty}P\big(t,F(x)\big)g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $P(t,F(x))$ 的具体表达式如下：

1) 当 $k=1$ 时

$$P\big(t,F(x)\big)=\exp\big\{-\lambda t\,[1-F(x)]\big\};$$

2) 当 $k=2$ 时

$$\begin{aligned}P\big(t,F(x)\big)\;=\;&\frac{1}{2}\big[1+F^{-\frac{1}{2}}(x)\big]\exp\big\{-\lambda t\,[1-F^{\frac{1}{2}}(x)]\big\}\\&+\frac{1}{2}\big[1-F^{-\frac{1}{2}}(x)\big]\exp\big\{-\lambda t\,[1+F^{\frac{1}{2}}(x)]\big\};\end{aligned}$$

3)　当 $k \geq 3$ 且 k 为奇数时

$$P\big(t,F(x)\big) = \frac{1}{kF(x)}\sum_{m=1}^{k}F^{\frac{m}{k}}(x)\Big\{\exp\big\{-\lambda t\,[1-F^{\frac{1}{k}}(x)]\big\}$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}}\cos\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]\exp\Big\{-\lambda t\Big[1-F^{\frac{1}{k}}(x)\cos\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)\Big]\Big\}\Big\};$$

4)　当 $k \geq 4$ 且 k 为偶数时

$$P\big(t,F(x)\big) = \frac{1}{kF(x)}\sum_{m=1}^{k}F^{\frac{m}{k}}(x)\Big\{\exp\big\{-\lambda t\,[1-F^{\frac{1}{k}}(x)]\big\}+(-1)^m\exp\big\{-\lambda t\,[1+F^{\frac{1}{k}}(x)]\big\}$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1}\cos\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]\exp\Big\{-\lambda t\Big[1-F^{\frac{1}{k}}(x)\cos\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)\Big]\Big\}\Big\}.$$

证明　由于 $N(t)$ 与 $X(t), Y$ 独立，$\xi_0=0$，则结构在任一时刻 t 的可靠度为

$$\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}P\big(N(t)=n\big)P\big(\xi_0<Y,\cdots,\xi_n<Y\,|\,N(t)=n\big)\\
&= P\big(N(t)=0\big)P\big(\xi_0<Y\,|\,N(t)=0\big)\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}P\big(N(t)=n\big)P\big(\xi_0<Y,\cdots,\xi_n<Y\,|\,N(t)=n\big)\\
&= P\big(N(t)=0\big)P(\xi_0<Y)+\sum_{n=1}^{\infty}P\big(N(t)=n\big)P\big(\xi_0<Y,\cdots,\xi_n<Y\big)\\
&= P\big(N(t)=0\big)P(Y>0)+\sum_{n=1}^{\infty}P\big(N(t)=n\big)P\Big(\max_{0\le i\le n}\xi_i<Y\Big)\\
&= P\big(N(t)=0\big)\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}P\big(N(t)=n\big)\int_0^{+\infty}\big[F(x)\big]^n g(x)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}P\big(N(t)=n\big)\int_0^{+\infty}\big[F(x)\big]^n g(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\big[F(x)\big]^n P\big(N(t)=n\big)\Big\}g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由引理 2，令母函数 $P(t,s)$ 中的 $s=F(x)$，可得

$$\begin{aligned}
P\big(t,F(x)\big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\big[F(x)\big]^n P\big(N(t)=n\big)\\
&= 1+\frac{F(x)-1}{kF(x)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j}{1-F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j}\big\{1-\exp\big[-\lambda t(1-F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j)\big]\big\}.
\end{aligned}$$

将上式代入 $R(t)$，则

$$R(t)=\int_0^{+\infty}P\big(t,F(x)\big)g(x)\mathrm{d}x.$$

现就 k 的取值对 $P(t,F(x))$ 进行分类讨论：

1) 当 $k=1$ 时，即滤过复合 Erlang 更新过程的更新间距服从指数分布，$\{X(t),\,t\geq 0\}$ 就是滤过复合 Poisson 更新过程。由引理 1

$$P\big(t,F(x)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\big[F(x)\big]^nP\big(N(t)=n\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\big[F(x)\big]^n\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\exp\big\{-\lambda t\,[\,1-F(x)\,]\big\},$$

由此可得结构在任一时刻 t 的可靠度为

$$R(t)=\int_0^{+\infty}\exp\big\{-\lambda t\,[\,1-F(x)\,]\big\}g(x)\mathrm{d}x.$$

2) 当 k 为偶数时，由 $(F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j)^k=F(x)$，$1-x^k=(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$ 得

$$\begin{aligned}P\big(t,F(x)\big)&=1-\frac{1}{kF(x)}\sum_{j=0}^{k-1}\{1-\exp[-\lambda t(1-F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j)]\}\sum_{m=1}^{k}\big[F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j\big]^m\\&=1-\frac{1}{kF(x)}\sum_{m=1}^{k}F^{\frac{m}{k}}(x)\sum_{j=0}^{k-1}(\varepsilon^j)^m\{1-\exp[-\lambda t(1-F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j)]\}\\&=\frac{1}{kF(x)}\sum_{m=1}^{k}F^{\frac{m}{k}}(x)\sum_{j=0}^{k-1}(\varepsilon^j)^m\exp\big[-\lambda t(1-F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j)\big],\end{aligned}\tag{1}$$

令

$$T_m(x)=\sum_{j=0}^{k-1}(\varepsilon^j)^m\exp\big[-\lambda t(1-F^{\frac{1}{k}}(x)\varepsilon^j)\big],\quad m=1,\cdots,k,$$

则 (1) 式可改写为

$$P\big(t,F(x)\big)=\frac{1}{kF(x)}\sum_{m=1}^{k}F^{\frac{m}{k}}(x)T_m(x).\tag{2}$$

由 $\varepsilon=\exp(2\pi\mathrm{i}/k)$ 可计算得

$$\begin{aligned}T_m(x)=&\sum_{j=0}^{k-1}\Big\{\cos\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]+\mathrm{i}\sin\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]\Big\}\\&\exp\Big\{-\lambda t\Big[1-F^{\frac{1}{k}}(x)\cos\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)\Big]\Big\},\quad m=1,\cdots,k.\end{aligned}$$

(A) 当 $k=2$ 时，由 (2) 式得

$$\begin{aligned}P\big(t,F(x)\big)&=\frac{1}{2F(x)}\sum_{m=1}^{2}F^{\frac{m}{2}}(x)T_m(x)\\&=\frac{1}{2}\big[1+F^{-\frac{1}{2}}(x)\big]\exp\big[-\lambda t(1-F^{\frac{1}{2}}(x))\big]+\frac{1}{2}\big[1-F^{-\frac{1}{2}}(x)\big]\exp\big[-\lambda t(1+F^{\frac{1}{2}}(x))\big].\end{aligned}$$

(B)　当 $k \geq 2$，且 k 为偶数时

$$\begin{aligned}
T_m(x) =& \sum_{j=0}^{k-1}\Big\{\cos\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big] \\
&+\mathrm{i}\sin\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]\Big\}\exp\Big\{-\lambda t\Big[1-F^{\frac{1}{k}}(x)\cos\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)\Big]\Big\} \\
=& \exp\{-\lambda t[1-F^{\frac{1}{k}}(x)]\}+(-1)^m\exp\{-\lambda t[1+F^{\frac{1}{k}}(x)]\} \\
&+\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1}\Big\{\cos\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big] \\
&+\mathrm{i}\sin\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]\Big\}\exp\Big\{-\lambda t\Big[1-F^{\frac{1}{k}}(x)\cos\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)\Big]\Big\} \\
&+\sum_{j=\frac{k}{2}+1}^{k-1}\Big\{\cos\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big] \\
&+\mathrm{i}\sin\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]\Big\}\exp\Big\{-\lambda t\Big[1-F^{\frac{1}{k}}(x)\cos\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)\Big]\Big\} \\
=& \exp\{-\lambda t[1-F^{\frac{1}{k}}(x)]\}+(-1)^m\exp\{-\lambda t[1+F^{\frac{1}{k}}(x)]\} \\
&+2\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1}\cos\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]\exp\Big\{-\lambda t\Big[1-F^{\frac{1}{k}}(x)\cos\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

将上式代入 (2) 式，即证得结论成立。

3)　当 k 为奇数时，同理可证得

$$\begin{aligned}
T_m(x) =& \exp\{-\lambda t[1-F^{\frac{1}{k}}(x)]\} \\
&+2\sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}}\cos\Big[\lambda tF^{\frac{1}{k}}(x)\sin\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)+\frac{2\pi mj}{k}\Big]\exp\Big\{-\lambda t\Big[1-F^{\frac{1}{k}}(x)\cos\Big(\frac{2\pi j}{k}\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

将上式代入 (2) 式，亦证得定理结论成立。

参考文献：

[1] 公路桥梁车辆荷载研究课题组. 公路桥梁车辆荷载研究[J]. 公路，1997, 3: 8-12
Highway and bridge vehicle loads research group. Research of highway and bridge vehicle loads[J]. Highway, 1997, 3: 8-12

[2] 梅刚，秦权，林道锦. 公路桥梁车辆荷载的双峰分布概率模型[J]. 清华大学学报(自然科学版)，2003, 43(10): 1394-1396
Mei G, Qin Q, Lin D J. Bi-model probabilistic model of highway and bridge vehicle loads[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2003, 43(10): 1394-1396

[3] 林升光. 指数-复合 Weibull 过程模型结构可靠度的最小方差无偏估计[J]. 运筹学学报，1998, 2(3): 81-86

Lin S G. Minimum variance unbiased estimator of structural reliability for exponential distribution-compound Weibull process model[J]. OR Transactions, 1998, 2(3): 81-86

[4] 林升光. 正态-平稳二项过程模型结构可靠度的最小方差无偏估计[J]. 运筹学学报，1999, 3(3): 85-92
Lin S G. Minimum variance unbiased estimator of structural reliability normal distribution-stationary binomial process model[J]. OR Transactions, 1999, 3(3): 85-92

[5] 秦权，林道锦，梅刚. 结构可靠度随机有限元[M]. 北京：清华大学出版社，2006
Qin Q, Lin D J, Mei G. Reliability Stochastic Finite Element Methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006

[6] William F. An Introduction to Probabilty Theory and its Application[M]. New York: Wiley, 1950

[7] Emanuel P. Stochastic Processes[M]. San Francisco: Holden-Day, 1962

Structural Reliability for Stress Obeying Filtered Compound Erlang Renewal Process

KE Jun-bin

(School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007)

Abstract: Recently, a filtered compound Erlang renewal process is frequently used to describe vehicle loads in our country. The purpose of this paper is to discuss the structural reliability model, whose strength is random and stress is distributed by a filtered compound Erlang renewal process. Based on the generating function of Erlang renewal processes, explicit expressions for the structural reliability (under four different situations) about this model are derived.

Keywords: random load; filtered composite Erlang renewal process; generating function; structural reliability

Received: 08 Dec 2008. **Accepted:** 15 July 2009.

Foundation item: The Natural Science Foundation of Fujian Province (2006J0193).